

# TABLE DES MATIÈRES

---

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| NOTATIONS PERMANENTES ..... | XXI |
|-----------------------------|-----|

## CHAPITRE I

### ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE DE BOOLE

#### I. Quantité booléenne.

|                                                                                      |   |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 1. Quantité booléenne simple .....                                                   | 1 |
| 2. Exemples de quantités booléennes .....                                            | 1 |
| 3. Relation d'ordre .....                                                            | 1 |
| 4. Dualité .....                                                                     | 2 |
| 5. Quantité booléenne générale .....                                                 | 2 |
| 6. Représentation spatiale d'une quantité booléenne générale.....                    | 3 |
| 7. Représentation binaire des quantités booléennes générales. Affixe.....            | 5 |
| 8. Relation d'ordre total pour les affixes .....                                     | 6 |
| 9. Relation d'ordre partiel pour les valeurs d'une quantité booléenne générale ..... | 6 |
| 10. Dualité .....                                                                    | 7 |

#### II. Fonctions booléennes.

|                                                                               |   |
|-------------------------------------------------------------------------------|---|
| 11. Fonctions booléennes .....                                                | 7 |
| 12. Interprétation spatiale des fonctions booléennes simples ou générales.... | 8 |
| 13. Duale d'une fonction booléenne .....                                      | 8 |

#### III. Etude élémentaire de quelques fonctions simples.

|                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 14. Nombre des fonctions booléennes de $n$ variables.....                        | 9  |
| 15. Fonctions booléennes simples d'une variable.....                             | 9  |
| 16. Propriétés du complément .....                                               | 10 |
| 17. Interprétation du complément.....                                            | 10 |
| 18. Complément d'une variable booléenne générale, d'une fonction booléenne ..... | 11 |
| 19. Somme .....                                                                  | 11 |
| 20. Interprétation de la somme .....                                             | 12 |
| 21. Somme de trois quantités, de $n$ quantités .....                             | 13 |
| 22. Produit .....                                                                | 14 |
| 23. Exemples de produits .....                                                   | 15 |
| 24. Propriétés combinées de la somme et du produit.....                          | 15 |

|                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 25. Produit de 3 quantités, de $n$ quantités .....                                   | 16 |
| 26. Complément d'une somme ou d'un produit .....                                     | 17 |
| 27. Dualité entre la somme et le produit .....                                       | 17 |
| 28. Fonctions booléennes simples de variables simples .....                          | 18 |
| 29. Disjonction .....                                                                | 19 |
| 30. Fonction majorité .....                                                          | 20 |
| 31. Fonction de Lagrange $U$ .....                                                   | 21 |
| 32. Fonction $q$ , fonctions symétriques .....                                       | 21 |
| 33. Extension des opérations élémentaires à des variables booléennes générales ..... | 22 |
| 34. Cas particulier de la somme et du produit .....                                  | 22 |
| 35. Opérations mixtes .....                                                          | 23 |
| 36. Condensé additif, condensé multiplicatif .....                                   | 23 |

#### IV. Variables et fonctions $\emptyset$ -booléennes.

|                                                                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 37. Quantité $\emptyset$ -booléenne .....                                                                                                          | 23 |
| 38. Relation d'ordre .....                                                                                                                         | 24 |
| 39. Bornes booléennes d'une quantité $\emptyset$ -booléenne générale .....                                                                         | 24 |
| 40. Dualité pour une quantité $\emptyset$ -booléenne .....                                                                                         | 24 |
| 41. Bornes et dualité .....                                                                                                                        | 25 |
| 42. Fonction $\emptyset$ -booléenne d'une variable booléenne générale .....                                                                        | 25 |
| 43. Interprétation comme fonction incomplète .....                                                                                                 | 26 |
| 44. Dualité pour une fonction $\emptyset$ -booléenne .....                                                                                         | 26 |
| 45. Nombre de fonctions $\emptyset$ -booléennes .....                                                                                              | 26 |
| 46. Bornes booléennes d'une fonction $\emptyset$ -booléenne .....                                                                                  | 27 |
| 47. Fonctions $\emptyset$ -booléennes compatibles .....                                                                                            | 28 |
| 48. Fonctions très incomplètes .....                                                                                                               | 28 |
| 49. Exemple .....                                                                                                                                  | 30 |
| 50. Recherche de fonctions booléennes compatibles avec une fonction $\emptyset$ -booléenne donnée et ne dépendant pas de certaines variables ..... | 30 |
| 51. Extension d'une fonction $\emptyset$ -booléenne au cas d'une variable $\emptyset$ -booléenne .....                                             | 31 |
| 52. Somme, produit, complément de quantités $\emptyset$ -booléennes .....                                                                          | 32 |
| 53. Bornes d'un complément, d'une somme, d'un produit .....                                                                                        | 32 |
| 54. Particularités des fonctions ainsi définies .....                                                                                              | 32 |
| 55. Fonction « compatibilité » .....                                                                                                               | 33 |

### CHAPITRE II

#### FORMES SYSTÉMATIQUES

##### I. Première et deuxième formes de Lagrange.

|                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Monôme $\emptyset$ -booléen général ou expression $\Pi$ .....                          | 34 |
| 2. Relation d'infériorité .....                                                           | 34 |
| 3. Un théorème sur le nombre des monômes inférieurs à une fonction booléenne simple ..... | 35 |
| 4. Polynôme $\emptyset$ -booléen général ou expression $\Sigma\Pi$ .....                  | 35 |
| 5. Opérations sur les polynômes .....                                                     | 36 |
| 6. Complément relatif d'une variable booléenne générale .....                             | 36 |

|                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 7. Théorème fondamental de Lagrange pour une fonction $\mathcal{O}$ -booléenne générale..... | 37 |
| 8. Passage d'un polynôme à la forme de Lagrange .....                                        | 38 |
| 9. Opérations sur la forme de Lagrange .....                                                 | 39 |
| 10. Monal $\mathcal{O}$ -booléen ou expression $\Sigma$ .....                                | 39 |
| 11. Polynal $\mathcal{O}$ -booléen ou expression $\Pi\Sigma$ .....                           | 40 |
| 12. Opérations sur les polynaux .....                                                        | 40 |
| 13. Monal de Lagrange .....                                                                  | 41 |
| 14. Seconde forme de Lagrange .....                                                          | 42 |
| 15. Passage d'une forme de Lagrange à l'autre .....                                          | 42 |

## II. Ecriture préfixée.

|                                                                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 16. Définition de l'écriture préfixée.....                                                                                              | 43 |
| 17. Expressions en écriture préfixée .....                                                                                              | 43 |
| 18. Condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite d'opérateurs à deux facteurs, écrite en écriture préfixée, soit correcte ..... | 44 |
| 19. Nombre d'expressions contenant $n$ signes.....                                                                                      | 45 |

## III. Représentation d'une expression.

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| 20. Représentation d'un opérateur .....                       | 46 |
| 21. Combinaison d'opérateurs représentant une expression..... | 46 |
| 22. Notion de couche .....                                    | 46 |

## IV. Expressions canoniques et quasi canoniques.

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| 23. Opérateur $U$ .....                                                     | 47 |
| 24. Expression canonique en $U$ .....                                       | 47 |
| 25. Expressions canoniques en $Z$ .....                                     | 47 |
| 26. Expressions canoniques utilisant somme, produit et complément.....      | 48 |
| 27. Relation avec les formes de Lagrange .....                              | 49 |
| 28. Expressions canoniques utilisant l'implication et le complément.....    | 49 |
| 29. Expression canonique utilisant la fonction « ni » et le complément..... | 49 |
| 30. Expression canonique utilisant la fonction majorité.....                | 49 |
| 31. Propriété générale des expressions canoniques .....                     | 50 |
| 32. Expressions quasi canoniques .....                                      | 50 |
| 33. Expression quasi canonique faisant appel à l'implication.....           | 51 |
| 34. Cas d'un nombre pair de variables .....                                 | 51 |
| 35. Autres exemples d'expressions quasi canoniques .....                    | 52 |
| 36. Remarque finale .....                                                   | 53 |

## V. Forme polynomiale lexicographique.

|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| 37. Ordination des lettres dans les monômes de la forme de Lagrange..... | 53 |
| 38. Monôme lexicographique local, lexicographique.....                   | 54 |
| 39. Propriétés des monômes lexicographiques locaux .....                 | 54 |
| 40. Forme polynomiale lexicographique locale d'une fonction.....         | 54 |

|                                                                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 41. Transformation d'une forme polynomiale lexicographique locale d'une fonction simple .....                                      | 55 |
| 42. Transformation d'une forme polynomiale lexicographique locale d'une fonction générale .....                                    | 56 |
| 43. Monôme lexicographique local irréductible d'une fonction polynomiale ..                                                        | 56 |
| 44. Forme polynomiale lexicographique locale irréductible.....                                                                     | 57 |
| 45. Complément d'une fonction écrite sous forme lexicographique locale. ...                                                        | 58 |
| 46. Démonstration du théorème sur le complément .....                                                                              | 59 |
| 47. Somme et produit de formes lexicographiques locales .....                                                                      | 59 |
| 48. Relation d'ordre entre fonctions écrites sous forme polynomiale lexicographique locale irréductible .....                      | 60 |
| 49. Etude des formes polynomiales lexicographiques locales des fonctions compatibles avec une fonction $\emptyset$ -booléenne..... | 61 |
| 50. Modification de l'ordre lexicographique dans un cas particulier (abréviation) .....                                            | 62 |
| 51. Abréviation d'un complément, d'une somme, d'un produit.....                                                                    | 63 |
| 52. Non-unicité du procédé du n° 49 si l'on permet des abréviations.....                                                           | 65 |
| 53. Renseignements numériques sur les formes lexicographiques.....                                                                 | 66 |

## VI. Expressions lexicographiques.

|                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------|----|
| 54. Expressions lexicographiques .....                                 | 67 |
| 55. Expression lexicographique pour les opérateurs $U$ et « ni » ..... | 67 |
| 56. Cas des fonctions $\emptyset$ -booléennes.....                     | 68 |

## VII. Sommes de monômes disjoints.

|                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 57. Famille de monômes disjoints.....                                                       | 69 |
| 58. Poids d'une somme de monômes disjoints .....                                            | 69 |
| 59. Obtention d'une somme de monômes disjoints à partir d'une somme de monômes .....        | 70 |
| 60. Forme lexicographique locale disjointe .....                                            | 71 |
| 61. Somme irréductible de monômes disjoints .....                                           | 71 |
| 62. Nombre maximal de monômes disjoints dans une forme irréductible (fonction simple) ..... | 72 |
| 63. Remarque sur les formes lexicographiques locales .....                                  | 72 |
| 64. Produit de deux sommes de monômes disjoints.....                                        | 73 |

## VIII. Couvertures du cube.

|                                                                                            |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 65. Une remarque sur les intersections de monômes .....                                    | 73 |
| 66. Application à la couverture du cube .....                                              | 74 |
| 67. Nombre maximal de monômes nécessaires pour une couverture non redondante du cube ..... | 74 |
| 68. Nombre minimal de monômes nécessaires pour une couverture du cube. ...                 | 74 |
| 69. Couverture du cube adaptée à une fonction générale incomplète $\Phi(X)$ ...            | 75 |
| 70. Expression de $\Phi(X)$ au moyen des monômes d'une couverture adaptée...               | 76 |

## CHAPITRE III

## CORPS DE RESTES — ALGÈBRE DE POST

## I. Corps de restes.

|                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Classes modulo $p$ .....                                                                        | 77 |
| 2. Propriétés des classes .....                                                                    | 77 |
| 3. Addition des classes .....                                                                      | 78 |
| 4. Propriétés de l'addition .....                                                                  | 78 |
| 5. Multiplication des classes .....                                                                | 79 |
| 6. Propriétés de la multiplication .....                                                           | 80 |
| 7. Etude de la division lorsque le module est premier .....                                        | 80 |
| 8. Relation avec l'algèbre de Boole lorsque $p = 2$ .....                                          | 81 |
| 9. Opérations booléennes somme et complément en notation galoisienne... ..                         | 81 |
| 10. Remarque sur le calcul modulo 2 .....                                                          | 82 |
| 11. Quelques exemples d'application .....                                                          | 82 |
| 12. Théorème de Lagrange .....                                                                     | 83 |
| 13. Applications .....                                                                             | 84 |
| 14. Absence de théorème analogue dans l'anneau des classes si le module<br>n'est pas premier ..... | 85 |
| 15. Applications possibles du cas $p \neq 2$ ( $p$ premier) .....                                  | 86 |

## II. Algèbre de Post.

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| 16. Définition .....                 | 86 |
| 17. Propriétés des opérations .....  | 87 |
| 18. Dualité .....                    | 87 |
| 19. Exemples d'algèbre de Post ..... | 88 |
| 20. Glissement .....                 | 88 |
| 21. Théorème de Lagrange .....       | 89 |

## CHAPITRE IV

## MONÔMES PREMIERS — BASES IRREDONDANTES

## I. Consensus.

|                                                                                                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Monôme en infériorité irredondante avec une somme de monômes .....                                    | 90  |
| 2. Consensus .....                                                                                       | 91  |
| 3. Propriété caractéristique du consensus .....                                                          | 92  |
| 4. Propriété des monômes maximaux inférieurs à une somme de monômes. ..                                  | 93  |
| 5. Cas de deux monômes .....                                                                             | 94  |
| 6. Lemmes sur le consensus de deux et trois monômes .....                                                | 94  |
| 7. Monômes marqués .....                                                                                 | 98  |
| 8. Description d'un algorithme de formation des consensus basé sur l'ordi-<br>nation des variables ..... | 99  |
| 9. Propriétés de cet algorithme .....                                                                    | 100 |



**II. Monômes premiers.**

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 10. Monômes premiers d'une fonction booléenne .....                                   | 101 |
| 11. Autre méthode pour la détermination des monômes premiers. Tour de consensus ..... | 102 |
| 12. Relations de consensus entre monômes premiers .....                               | 104 |
| 13. Monômes premiers d'un produit .....                                               | 104 |
| 14. Monômes premiers d'un complément .....                                            | 105 |
| 15. Recherche des monômes premiers à partir de la forme de Lagrange .....             | 106 |
| 16. Formation de fonctions ayant un grand nombre de monômes premiers ..               | 108 |
| 17. Borne supérieure du nombre de monômes premiers d'une fonction .....               | 109 |
| 18. Représentation de fonctions booléennes par leurs monômes premiers ..              | 110 |
| 19. Monômes premiers et relation d'ordre .....                                        | 111 |
| 20. Monôme premier d'une fonction $\emptyset$ -booléenne simple .....                 | 112 |
| 21. Cas d'une fonction booléenne très incomplète .....                                | 112 |

**III. Bases irrédundantes des fonctions  $\emptyset$ -booléennes simples.**

|                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 22. Base. Base complète. Base irrédundante .....                                                                        | 112 |
| 23. Indications sur le nombre d'éléments d'une base irrédundante .....                                                  | 113 |
| 24. Monôme premier obligatoire. Monôme premier interdit de première espèce .....                                        | 114 |
| 25. Un théorème sur les monômes non obligatoires .....                                                                  | 114 |
| 26. Monômes premiers interdits de deuxième espèce .....                                                                 | 115 |
| 27. Obtention de toutes les bases irrédundantes par couverture des points ...                                           | 115 |
| 28. Recherche des bases irrédundantes par couverture de monômes .....                                                   | 119 |
| 29. Recherche des bases irrédundantes d'une fonction booléenne simple complète par les relations de consensus .....     | 120 |
| 30. Recherche des bases irrédundantes d'une fonction $\emptyset$ -booléenne simple par les relations de consensus ..... | 121 |
| 31. Comparaison des méthodes au point de vue du nombre d'opérations ...                                                 | 122 |
| 32. Problème de minimisation dans le cas d'une fonction simple (complète ou incomplète) .....                           | 124 |
| 33. Monômes non inutiles n'intervenant pas dans une représentation de coût minimal .....                                | 125 |

**IV. Monômes premiers et bases des fonctions générales.**

|                                                            |     |
|------------------------------------------------------------|-----|
| 34. Fonction simple associée à une fonction générale ..... | 126 |
| 35. Propriétés .....                                       | 126 |
| 36. Application aux monômes booléens généraux .....        | 127 |
| 37. Consensus de monômes booléens généraux .....           | 128 |
| 38. Monôme premier d'une fonction générale .....           | 129 |
| 39. Base d'une fonction générale .....                     | 131 |
| 40. Recherche des bases irrédundantes .....                | 131 |
| 41. Problèmes de minimisation .....                        | 135 |

**V. Couverture des faces et des arêtes.**

|                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------|-----|
| 42. Consensus d'ordre $p$ .....                                | 136 |
| 43. Relations entre les consensus d'ordre $p$ et $p - 1$ ..... | 138 |
| 44. Recherche des consensus d'ordre $p$ .....                  | 139 |

|                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 45. Propriété relative aux faces de dimension $q$ .....                                 | 141 |
| 46. Couverture des faces de dimension $q$ d'une fonction $\emptyset$ -booléenne.....    | 141 |
| 47. Couverture de coût minimal des faces de dimension $q$ .....                         | 142 |
| 48. Exemples .....                                                                      | 142 |
| 49. Consensus d'ordre $p$ pour une famille de monômes généraux.....                     | 143 |
| 50. Couverture des faces de dimension $q$ d'une fonction générale.....                  | 144 |
| 51. Couverture de coût minimal des faces de dimension $q$ d'une fonction générale ..... | 144 |
| 52. Exemple .....                                                                       | 144 |

## CHAPITRE V

## DISTANCES, SYMÉTRIES

## I. Distances sur l'hypercube.

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| 1. Distance de deux sommets de l'hypercube ..... | 146 |
| 2. Propriétés de la distance .....               | 146 |
| 3. Distance d'un sommet à un monôme simple ..... | 147 |
| 4. Propriété de 2 monômes sécants.....           | 147 |
| 5. Distance de deux monômes .....                | 148 |

## II. Connexité.

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6. Fonction booléenne simple connexe .....                                                | 148 |
| 7. Constituants connexes d'une fonction simple .....                                      | 149 |
| 8. Monômes et connexité .....                                                             | 150 |
| 9. Recherche des constituants connexes d'une fonction donnée comme somme de monômes ..... | 150 |
| 10. Renseignements numériques sur le nombre des constituants connexes...                  | 152 |

## III. Sommets contigus à une fonction booléenne.

|                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 11. Définition .....                                                                             | 153 |
| 12. Propriété des sommets contigus à une fonction.....                                           | 153 |
| 13. Obtention des sommets contigus à une fonction donnée sous forme d'une somme de monômes ..... | 153 |

## IV. Types de fonctions booléennes simples.

|                                                                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 14. Types de fonctions booléennes simples .....                                                                                          | 154 |
| 15. Liste des types de fonctions de 0, 1, 2, 3 variables.....                                                                            | 154 |
| 16. Nombre de fonctions dépendant effectivement de $n$ variables.....                                                                    | 156 |
| 17. Groupe des permutations et symétries des fonctions de $n$ variables.....                                                             | 157 |
| 18. Effet d'un cycle sur les sommets du cube.....                                                                                        | 158 |
| 19. Classes de transitivité d'un produit de cycles.....                                                                                  | 159 |
| 20. Fonctions conservées par un produit de cycles.....                                                                                   | 162 |
| 21. Relation entre le nombre de permutations-symétries qui conservent une fonction et le nombre de fonctions appartenant à son type..... | 162 |

|                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 22. Détermination du nombre des types de fonctions ayant certaines propriétés .....                                     | 162 |
| 23. Détermination du nombre des types de fonctions ayant $i$ points dans leur ensemble représentatif pour $n = 3$ ..... | 163 |
| 24. Résultats numériques sur le nombre des types de fonctions .....                                                     | 165 |
| 25. Renseignements sur les types de fonctions booléennes de quatre variables .....                                      | 165 |

## CHAPITRE VI

## ÉTUDE DÉTAILLÉE DE FONCTIONS

## I. Fonctions linéaires.

|                                           |     |
|-------------------------------------------|-----|
| 1. Fonctions linéaires .....              | 167 |
| 2. Relation avec les clés de parité ..... | 167 |

## II. Fonctions monotones.

|                                                                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3. Fonction croissante, fonction monotone par rapport à une variable .....                                                           | 168 |
| 4. Fonction croissante, fonction monotone .....                                                                                      | 169 |
| 5. Propriétés des fonctions croissantes, croissantes en $a$ .....                                                                    | 169 |
| 6. Enveloppe supérieure croissante en $a$ d'une fonction .....                                                                       | 170 |
| 7. Expression et propriétés de l'enveloppe supérieure croissante en $a$ .....                                                        | 171 |
| 8. Enveloppe inférieure croissante en $a$ d'une fonction .....                                                                       | 172 |
| 9. Expression et propriétés de l'enveloppe inférieure croissante en $a$ .....                                                        | 173 |
| 10. Enveloppe supérieure croissante d'une fonction .....                                                                             | 174 |
| 11. Propriétés et expression de l'enveloppe supérieure croissante .....                                                              | 174 |
| 12. Enveloppe inférieure croissante d'une fonction .....                                                                             | 176 |
| 13. Propriétés et expression de l'enveloppe inférieure croissante .....                                                              | 176 |
| 14. Propriétés des fonctions croissantes et de leurs bornes .....                                                                    | 177 |
| 15. Condition pour qu'une fonction $\emptyset$ -booléenne soit compatible avec une fonction croissante .....                         | 177 |
| 16. Sommets caractéristiques d'une fonction croissante .....                                                                         | 178 |
| 17. Sommets caractéristiques d'une fonction croissante par rapport à certaines variables .....                                       | 180 |
| 18. Extension d'une fonction $\emptyset$ -booléenne croissante à une variable $\emptyset$ -booléenne .....                           | 181 |
| 19. Possibilité d'étendre à une variable $\emptyset$ -booléenne, les identités ne faisant appel qu'à des fonctions croissantes ..... | 181 |
| 20. Nombre maximal de monômes premiers d'une fonction croissante .....                                                               | 181 |

## III. Fonction croissante attachée à une fonction.

|                                                                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 21. Fonction croissante $\emptyset$ -booléenne attachée à une fonction $\emptyset$ -booléenne par dédoublement des variables ..... | 183 |
| 22. Existence de $\varphi^0$ .....                                                                                                 | 184 |
| 23. Obtention de fonctions booléennes compatibles avec $\varphi^0$ .....                                                           | 185 |
| 24. Recherche de la borne inférieure de $\varphi^0$ .....                                                                          | 186 |
| 25. Expression de la borne supérieure .....                                                                                        | 186 |
| 26. Autre expression de la borne supérieure .....                                                                                  | 187 |



|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 27. Passage de $\bar{\varphi}^0$ à $\varphi^0$ pour une fonction booléenne ..... | 187 |
| 28. Relation d'ordre .....                                                       | 188 |
| 29. Variables ne figurant pas dans $\varphi$ .....                               | 188 |
| 30. Relation entre les bases de $\bar{\varphi}$ et celles de $\varphi^0$ .....   | 189 |

#### IV. Fonctions impaires.

|                                                                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 31. Définition .....                                                                                            | 190 |
| 32. Fonctions symétriques impaires .....                                                                        | 190 |
| 33. Structure des fonctions impaires .....                                                                      | 191 |
| 34. Fonction paire .....                                                                                        | 191 |
| 35. Fonctions sur et sous-impaires .....                                                                        | 191 |
| 36. Fonction sur-impair comme somme de fonctions impaires .....                                                 | 192 |
| 37. Fonctions croissantes impaires, sous-impaires, sur-impaires .....                                           | 193 |
| 38. Propriété des fonctions croissantes impaires .....                                                          | 194 |
| 39. Structure des fonctions sur-impaires croissantes .....                                                      | 194 |
| 40. Structure des fonctions croissantes impaires .....                                                          | 195 |
| 41. Nombre maximal de monômes premiers dans une fonction croissante sur-impair (ou impair ou sous-impair) ..... | 195 |
| 42. Fonctions de type $S$ , fonctions de type $p$ .....                                                         | 195 |

#### V. Familles de fonctions booléennes.

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 43. Opération réduction .....                                                  | 196 |
| 44. Opération composition .....                                                | 196 |
| 45. Commutativité de la réduction et de la composition .....                   | 197 |
| 46. Famille de fonctions booléennes .....                                      | 197 |
| 47. Intersection, réunion de deux familles .....                               | 197 |
| 48. Famille maximale dans une autre .....                                      | 198 |
| 49. Propriété caractéristique d'une famille maximale dans une autre .....      | 198 |
| 50. Familles finies .....                                                      | 199 |
| 51. Familles infinies .....                                                    | 199 |
| 52. Familles linéaires .....                                                   | 199 |
| 53. Réduction d'une fonction non linéaire .....                                | 201 |
| 54. Familles $\Sigma$ et $\Pi$ .....                                           | 203 |
| 55. Familles $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_{0,1}, \Pi_0, \Pi_1, \Pi_{0,1}$ ..... | 203 |
| 56. Familles $M\Sigma$ et $M\Pi$ .....                                         | 204 |
| 57. Familles $M\Sigma_1$ et $M\Pi_0$ .....                                     | 205 |
| 58. Réduction d'une fonction non croissante .....                              | 205 |
| 59. Famille des fonctions impaires .....                                       | 206 |
| 60. Famille croissante impaire .....                                           | 207 |
| 61. Réduction d'une fonction non sur-impair, non impair .....                  | 207 |
| 62. Familles $S$ et $P$ .....                                                  | 208 |
| 63. Réduction d'une fonction non de type $S$ .....                             | 209 |
| 64. Familles croissantes sur et sous-impaires .....                            | 209 |
| 65. Réduction d'une fonction croissante sur-impair non dans $M$ .....          | 210 |
| 66. Sous-familles de $MS$ .....                                                | 210 |
| 67. Familles $MS_j, Mp_j$ .....                                                | 210 |
| 68. Génération de $MS_j$ .....                                                 | 211 |
| 69. Sous-familles maximales de $MS_j$ .....                                    | 212 |

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 70. Sous-familles maximales de $MS$ .....                                  | 212 |
| 71. Famille $MS_{j1}, Mp_{j1}$ .....                                       | 213 |
| 72. Sous-familles maximales de $MS_{j1}$ .....                             | 213 |
| 73. Classes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .....                          | 213 |
| 74. Fonctions impaires de classe $\alpha$ . Famille $I_\alpha$ .....       | 214 |
| 75. Fonctions impaires. Famille $I$ .....                                  | 215 |
| 76. Fonctions croissantes. Famille $M$ .....                               | 216 |
| 77. Familles $M_0, M_1, M_{01}$ .....                                      | 216 |
| 78. Familles $\alpha\Pi, \alpha\Sigma$ .....                               | 217 |
| 79. Familles $\alpha S, \alpha p$ .....                                    | 218 |
| 80. Familles $\alpha S_j, \alpha p_j$ .....                                | 218 |
| 81. Sous-familles maximales de $\alpha S_j$ .....                          | 219 |
| 82. Famille $\alpha$ .....                                                 | 220 |
| 83. Familles $\alpha\beta\Sigma, \alpha\gamma\Pi$ .....                    | 221 |
| 84. Familles $S, p$ .....                                                  | 221 |
| 85. Familles $S_j, p_j$ .....                                              | 222 |
| 86. Sous-familles maximales de $S_j$ .....                                 | 222 |
| 87. Familles $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ .....                         | 223 |
| 88. Famille $\Omega$ .....                                                 | 224 |
| 89. Résumé des résultats .....                                             | 226 |
| 90. Tableau des familles si l'on dispose des constantes 0 et 1 .....       | 226 |
| 91. Tableau des familles contenant avec toute fonction son complément .... | 227 |

## VI. Fonctions à seuil.

|                                                                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 92. Définition .....                                                                                             | 227 |
| 93. Propriétés des fonctions à seuil .....                                                                       | 228 |
| 94. Relation d'inclusion des fonctions à seuil .....                                                             | 229 |
| 95. Recherche d'une fonction à seuil compatible avec une fonction $\emptyset$ -booléenne croissante donnée ..... | 229 |
| 96. Eliminations successives .....                                                                               | 229 |
| 97. Exemple .....                                                                                                | 230 |
| 98. Minimisation de $T$ dans le cas de l'exemple .....                                                           | 231 |
| 99. Autre exemple .....                                                                                          | 232 |
| 100. Fonction à fenêtre .....                                                                                    | 234 |

## VII. Fonctions symétriques. Fonctions à comparaison totale.

|                                                            |     |
|------------------------------------------------------------|-----|
| 101. Fonction symétrique .....                             | 235 |
| 102. Nombre des fonctions symétriques .....                | 235 |
| 103. Fonctions symétriques croissantes .....               | 236 |
| 104. Parties comparables relativement à une fonction ..... | 236 |
| 105. Relations avec la croissance et la décroissance ..... | 237 |
| 106. Relations avec les bornes .....                       | 237 |
| 107. Effet de la dualité .....                             | 237 |
| 108. Fonctions à comparaison totale .....                  | 238 |
| 109. Réduction des fonctions à comparaison totale .....    | 238 |
| 110. Cas des fonctions symétriques .....                   | 239 |
| 111. Cas des fonctions à seuil .....                       | 239 |

## CHAPITRE VII

## ÉQUATIONS ET QUESTIONS VOISINES

## I. Equations booléennes.

|                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Première propriété fondamentale .....                                             | 241 |
| 2. Deuxième propriété fondamentale .....                                             | 241 |
| 3. Solution d'une équation booléenne simple par passage à la forme de Lagrange ..... | 242 |
| 4. Théorème d'unicité pour les équations booléennes .....                            | 242 |
| 5. Solution paramétrique .....                                                       | 242 |
| 6. Expression de la solution lorsque celle-ci est unique .....                       | 246 |
| 7. Etude d'un système particulier .....                                              | 247 |

## II. Paramétrisation.

|                                                |     |
|------------------------------------------------|-----|
| 8. Paramétrisation d'une fonction simple ..... | 247 |
|------------------------------------------------|-----|

## III. Elimination, Résultant.

|                                                   |     |
|---------------------------------------------------|-----|
| 9. Résultant booléen .....                        | 248 |
| 10. Résultant booléen précisé .....               | 249 |
| 11. Inégalité des résultants .....                | 249 |
| 12. Pratique de l'élimination .....               | 250 |
| 13. Problème inverse de la paramétrisation .....  | 251 |
| 14. Solution à partir de la forme canonique ..... | 251 |

## IV. Indépendance de fonctions.

|                                                                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 15. Définition .....                                                                                           | 252 |
| 16. Nombre maximal de fonctions indépendantes .....                                                            | 253 |
| 17. Propriétés des systèmes de $n$ fonctions indépendantes de $n$ variables .....                              | 253 |
| 18. Constatation de l'indépendance pour un système de $n$ fonctions à $n$ variables .....                      | 253 |
| 19. Propriétés des fonctions faisant partie d'un système de $n$ fonctions indépendantes de $n$ variables ..... | 254 |
| 20. Expression d'une fonction quelconque au moyen d'un système de $n$ fonctions indépendantes .....            | 255 |
| 21. Transformation d'une fonction par une application du cube sur lui-même .....                               | 255 |
| 22. Systèmes de $p$ fonctions à $n$ variables .....                                                            | 256 |
| 23. Représentations d'une fonction donnée de $n$ variables simples au moyen de $p$ fonctions données .....     | 257 |
| 24. Encadrement d'une fonction relatif à $p$ fonctions données .....                                           | 257 |
| 25. Représentation de $p$ fonctions de $n$ variables simples au moyen de $k$ fonctions .....                   | 258 |

**V. Décomposition de fonctions.**

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| 26. Décomposition disjointe simple .....              | 259 |
| 27. Exemple .....                                     | 259 |
| 28. Décomposition disjointe .....                     | 261 |
| 29. Décomposition semi-disjointe d'une fonction ..... | 262 |

**CHAPITRE VIII**

**RÉALISATION DE FONCTIONS BOOLÉENNES  
AU MOYEN D'OPÉRATIONS DONNÉES**

**I. Représentation de fonctions incomplètes par des sommes de fonctions données, ou par des opérateurs  $q$ .**

|                                                                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Position du problème .....                                                                                                | 263 |
| 2. Liste préliminaire .....                                                                                                  | 264 |
| 3. Liste restreinte .....                                                                                                    | 264 |
| 4. Obtention des représentations .....                                                                                       | 265 |
| 5. Structure d'une combinaison de sommes et produits .....                                                                   | 265 |
| 6. Borne inférieure du coût d'une fonction .....                                                                             | 266 |
| 7. Borne supérieure du coût .....                                                                                            | 267 |
| 8. Propriétés des expressions de fonctions monotones en $a$ (le coût étant mesuré par le nombre de lettres) .....            | 267 |
| 9. Recherche des représentations de signature $\Pi\Sigma\Pi$ et $\Sigma\Pi\Sigma$ des fonctions booléennes incomplètes ..... | 268 |
| 10. Suppression d'une fonction .....                                                                                         | 270 |
| 11. Suite de l'exemple du n° 9 .....                                                                                         | 272 |
| 12. Génération de fonctions incomplètes à partir de $x + yz = q$ .....                                                       | 273 |
| 13. Pratique de la génération .....                                                                                          | 274 |
| 14. Evaluation du nombre d'opérateurs .....                                                                                  | 275 |

**II. Représentation de fonctions incomplètes par des opérateurs croissants donnés.**

|                                                                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 15. Un principe général .....                                                                                                         | 276 |
| 16. Suppression de lignes .....                                                                                                       | 277 |
| 17. Propriété des lignes du tableau .....                                                                                             | 278 |
| 18. Représentation de fonctions croissantes incomplètes par l'opération majorité .....                                                | 279 |
| 19. Détermination d'une fonction impaire supérieure à une fonction $\emptyset$ -booléenne sous-impairée donnée .....                  | 280 |
| 20. Réalisation d'une fonction croissante incomplète par des opérateurs majoritaires au moyen de deux variables supplémentaires ..... | 281 |
| 21. Réalisation d'une fonction croissante par des opérateurs à seuil .....                                                            | 283 |
| 22. Méthode systématique de recherche .....                                                                                           | 284 |
| 23. Représentation de fonctions quelconques par des opérateurs croissants ..                                                          | 285 |

**III. Réalisation de fonctions par des opérateurs monotones.**

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 24. Principe de la méthode.....      | 286 |
| 25. Modification de la méthode ..... | 286 |
| 26. Suppression de colonnes .....    | 288 |
| 27. Suppression de lignes .....      | 288 |
| 28. Exemple .....                    | 288 |
| 29. Structure « ni » à parité .....  | 289 |
| 30. Structure « ni » quelconque..... | 290 |
| 31. Coût d'une telle formule .....   | 291 |

**IV. Méthode des variables surabondantes.**

|                                                                                                     |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 32. Introduction de variables surabondantes dans une fonction incomplète...                         | 292 |
| 33. Cas de variables explicites .....                                                               | 292 |
| 34. Théorème de substitution .....                                                                  | 293 |
| 35. Cas où l'on impose la croissance par rapport aux variables explicites....                       | 293 |
| 36. Cas où l'on impose la croissance par rapport à toutes les variables.....                        | 294 |
| 37. Relation avec la méthode du n° 15 .....                                                         | 294 |
| 38. Application aux représentations « ni » à trois couches de fonctions booléennes .....            | 296 |
| 39. Cas d'une fonction générale incomplète .....                                                    | 297 |
| 40. Application aux représentations $\Pi$ , $\Sigma\Pi$ et $\Sigma\Pi\Sigma$ .....                  | 299 |
| 41. Somme directe .....                                                                             | 299 |
| 42. Recherche des sommes directes .....                                                             | 299 |
| 43. Terme direct extrêmeal .....                                                                    | 300 |
| 44. Fonction privilégiée par rapport à la somme et au produit .....                                 | 300 |
| 45. Passage à une fonction privilégiée par dédoublement de variables .....                          | 301 |
| 46. Décomposition directe par rapport à l'opérateur « ni » .....                                    | 302 |
| 47. Obtention de représentations au moyen de l'opérateur « ni » par dédoublement de variables ..... | 302 |

**V. Structures en ligne.**

|                                                                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 48. Génération de fonctions linéaires par disjonction.....                                                     | 303 |
| 49. Structure en ligne .....                                                                                   | 304 |
| 50. Possibilités des structures en ligne avec opérations à 2 variables.....                                    | 304 |
| 51. Autres exemples de structures en ligne .....                                                               | 306 |
| 52. Sur une généralisation des structures en ligne permettent d'obtenir toute fonction .....                   | 306 |
| 53. Obtention des fonctions de $n + 1$ variables par des opérateurs à $n$ variables ( $n > 2$ ) en ligne ..... | 306 |
| 54. Etude des fonctions de 5 variables réalisables par des opérateurs à trois entrées en ligne .....           | 307 |

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| BIBLIOGRAPHIE RÉCENTE..... | 311 |
|----------------------------|-----|

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| INDEX ALPHABÉTIQUE..... | 315 |
|-------------------------|-----|