

Le présent fichier PDF **Boole** reproduit des extraits du document

Initiation à l'informatique

L'auteur est le Chef de Bataillon **Cornebois**

Edité par l'**Ecole Supérieure Technique du Génie** (armée française)

Une réimpression 1975 d'une première édition de 1973.

Cet ouvrage est disponible sous le numéro **AC 26132** dans l'inventaire de la collection de l'ACONIT, Association pour un conservatoire de l'informatique et de la télématique, Grenoble.

Ce document de 102 pages est structuré en deux parties : une partie de textes en 9 chapitres et des annexes, et une partie qui comporte 23 figures.

Il s'agit d'un photocopié de cours.

Les extraits fournis dans le présent PDF donnent une copie des 10 pages de l'annexe-I qui a pour titre « **Algèbre de Boole** » :

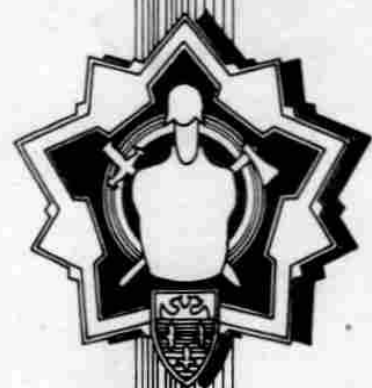
Pour utiliser ce document, mentionnez l'auteur du document, ainsi que la Base de Données ACONIT n° 26132.

Il est rappelé que la loi sur les droits d'auteur n'autorise que les reproductions partielles de documents à titre individuel et pour des motifs de recherche.

AC26132

ECOLE SUPERIEURE TECHNIQUE DU GENIE

INITIATION A L'INFORMATIQUE



Chef de Bataillon CORNEBOIS
(réimpression 1975)

Inf. 3 - 73

ANNEXE I

ALGÈBRE DE BOOLE

L'algèbre de Boole est une algèbre logique dans laquelle une proposition est vraie ou fausse mais ne peut pas être les deux à la fois. De même un circuit ne peut être qu'ouvert ou fermé. Il est alors intéressant d'appliquer cette algèbre aussi bien dans les circuits de commutation à deux positions stables (ouvert = 1 ; fermé = 0) que dans le domaine administratif.

L'algèbre de Boole est qualitative, elle ne permet de connaître seulement que l'état final d'un système.

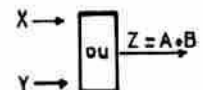
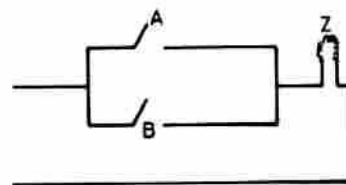
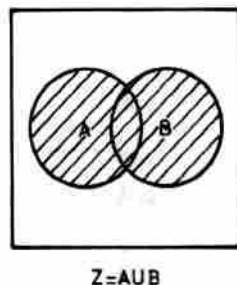
1.1 - OPERATIONS FONDAMENTALES

Par convention, nous adopterons le couple (0,1) pour exprimer les deux valeurs possibles de chaque variable booléenne.

1.11 - SOMME LOGIQUE (réunion, fonction OU)

Soit deux variables A et B ne pouvant prendre que deux valeurs 0 ou 1, il est possible de définir une fonction Z qui vaut 1 si A ou B vaut 1.

A	B	$Z=A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Remarque : il ne faut pas confondre le symbole + de la somme logique et le symbole + de l'addition arithmétique ou binaire.

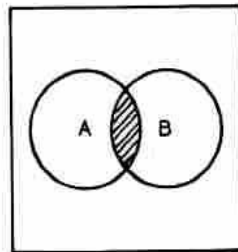
Propriétés :

$$\begin{aligned} A + 0 &= A \\ A + 1 &= 1 \\ A + A &= A \quad (\text{idempotence}) \\ A + B &= B + A \quad (\text{commutativité}) \\ A + (B + C) &= (A + B) + C \quad (\text{associativité}) \end{aligned}$$

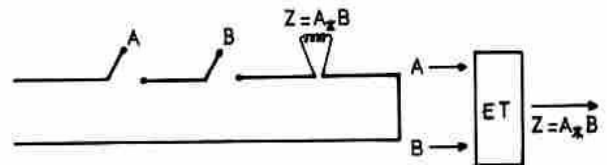
1.12 - PRODUIT LOGIQUE (intersection, fonction ET)

La fonction ET appliquée aux deux variables A et B, dont le résultat, Z, est égal à 1 si A et B sont respectivement égales à 1.

A	B	$Z = A * B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



$$Z = A \cap B$$



Circuit correspondant

Représentation
symbolique

Propriétés :

$$\begin{aligned} A * 0 &= 0 \\ A * 1 &= A \\ A * A &= A \quad (\text{idempotence}) \\ A * B &= B * A \quad (\text{commutativité}) \\ A * (B * C) &= (A * B) * C \quad (\text{associativité}) \end{aligned}$$

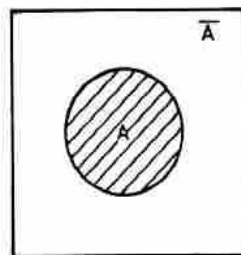
1.13 - DISTRIBUTIVITE DU PRODUIT PAR RAPPORT A LA SOMME

$$A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$$

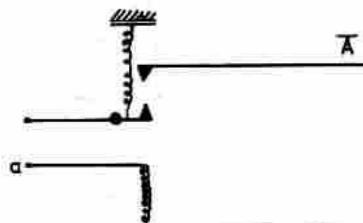
1.14 - LA NEGATION (complémentation, NON)

Est appelé complément, tout élément pour lequel la propriété A n'est pas vérifiée ou affirmée ($A = 0$).

A	$\bar{A}$
0	1
1	0



$$\bar{A}$$



Circuit non

Représentation
symbolique

1.15 - THEOREMES FONDAMENTAUX

L'algèbre de Boole est basée sur la réunion, l'intersection et la complémentation.

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A + \bar{A}$	$A * \bar{A}$	$\bar{\bar{A}}$	$A * B$	$A + A * B$	$A + B$	$A * (A + B)$	$\overline{A + B}$	$\bar{A} * \bar{B}$	$\overline{A * B}$	$\bar{A} + \bar{B}$
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0

L'examen du tableau ci-dessus permet de vérifier les relations suivantes :

$$A + \bar{A} = 1$$

$$A * \bar{A} = 0$$

$$\bar{\bar{A}} = A \quad (\text{involution})$$

$$A + A * B = A \quad (\text{absorption})$$

$$A * (A + B) = A \quad (\text{absorption})$$

Dualité (théorème de Morgan)

Il y a dualité entre les opérations OU et ET et les variables 1 et 0.

$$\overline{A + B} = \bar{A} * \bar{B}$$

$$\overline{A * B} = \bar{A} + \bar{B}$$

Autres relations :

$$A * (\bar{A} + B) = A * B$$

$$A + (\bar{A} * B) = A + B$$

$$B * (\bar{B} + A) = A * B$$

$$B + (\bar{B} * A) = A + B$$

$$A * B + A * \bar{B} = A$$

$$(A + B) * (A + \bar{B}) = A$$

1.2 - ALGÈBRE DE BOOLE DE VARIABLES BOOLEENNES

A partir des variables booléennes a, b, c, d (susceptibles de prendre les valeurs 0 ou 1), il est possible de définir :

- des monômes : "produit" d'un certain nombre de ces variables ;

Exemples : $\bar{a}, bd, b\bar{c}d$ ou $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \dots$ sont respectivement les compléments de $a, b, c, \dots$ (1)

- des polynômes : "somme" de monômes ;

Exemple : $ab + c + b\bar{c}d + a\bar{d}$

1.21 - FONCTIONS DE VARIABLES BOOLEENNES

On dit qu'une quantité booléenne f est fonction des variables booléennes a, b, c si la donnée de $a, b, c, \dots$ détermine la valeur de f .

$$f(a, b, c, \dots)$$

Exemple : $y = abcde + abcd\bar{e} + \bar{a}bcd\bar{e}$

qui vaut 1 pour les valeurs suivantes des variables.

a	b	c	d	e	abcde	abcd $\bar{e}$	$\bar{a}bcd\bar{e}$	y
1	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1

1.22 - FORME CANONIQUE

On appelle monôme canonique un monôme où figurent les n variables de la fonction sous forme directe ou complémentée.

Exemple : $y = \bar{a}bc + ab\bar{c} + \bar{a}bc + abc$

Un minterme est un produit booléen de n variables.

Exemple : $\bar{a}bc, ab\bar{c}, \dots$

Un maxterme est une somme booléenne de n variables.

Exemple : $a + b + c, \bar{a} + \bar{b} + c, \dots$

(1) $\bar{a}$, complément de a , vaut 1 lorsque a a pour valeur 0 et 0 si a vaut 1 ; $\bar{b}$, complément de $b, \dots$

Théorème : Toute fonction booléenne peut toujours être développée en une seule somme de mintermes.

1.3 - PRATIQUE DU CALCUL BINAIRE

1.31 - METHODE ALGEBRIQUE

En partant de la fonction initiale essayer de supprimer :

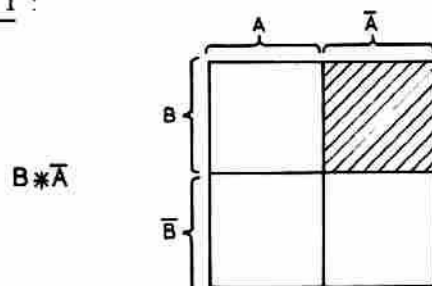
- les termes répétitifs : $A + A = A$
- les termes nuls : $A * \bar{A} + B = B$
- les tautologies ($A + \bar{A} = 1$) : $A * B + A * \bar{B} = A * (B + \bar{B}) = A$
- les termes : $A + A * B = A$
- les variables superflues : $A + \bar{A} B = A + B$

Il est aussi possible de simplifier en utilisant le théorème de Morgan ou ceux portant sur la distributivité.

1.32 - METHODE GRAPHIQUE

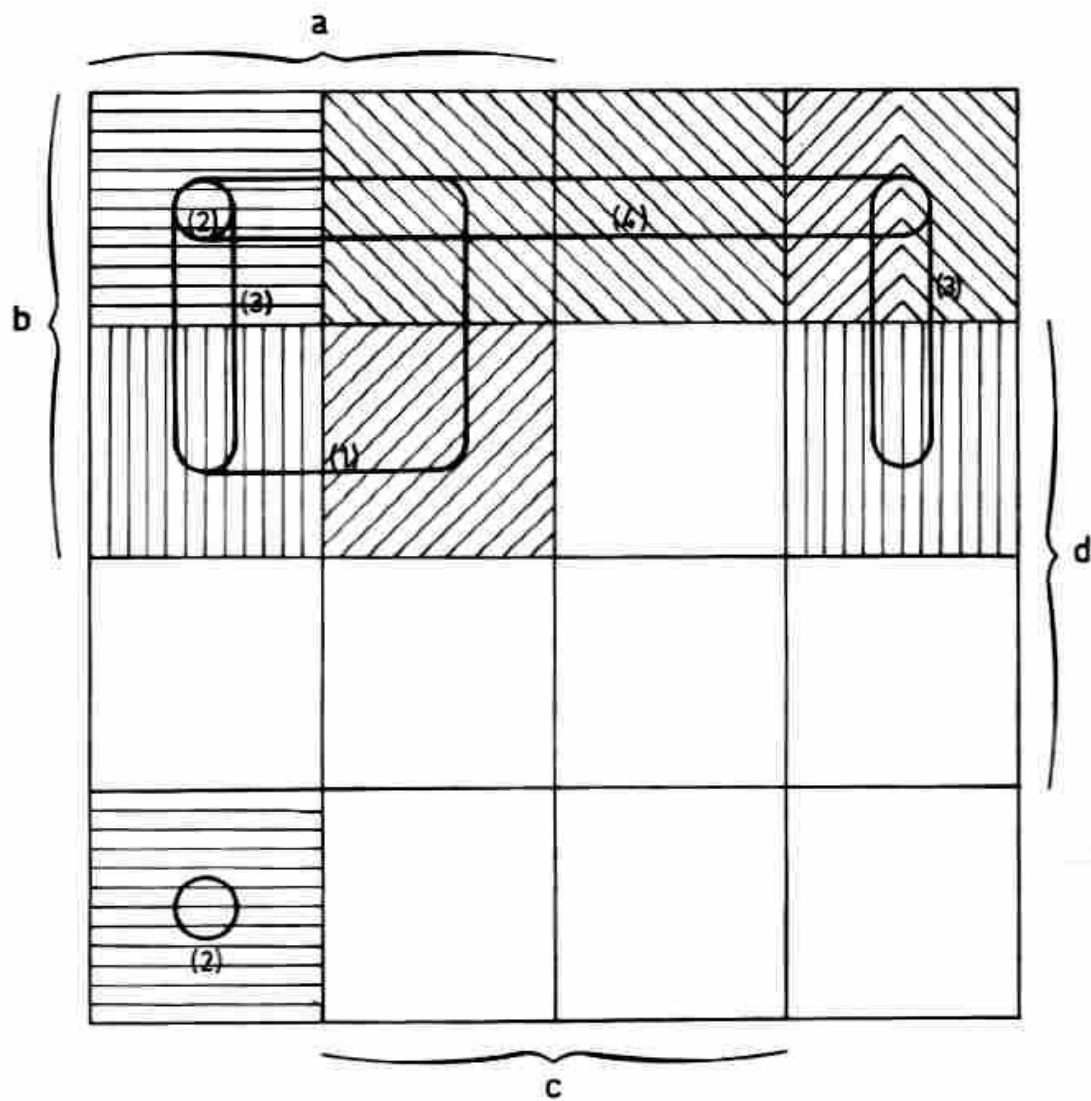
La représentation des monômes par des surfaces peut conduire à une simplification des fonctions.

Exemple 1 :



Exemple 2 : Simplifier la fonction

$$f = abcd + \bar{b}\bar{c}d + a\bar{c}\bar{d} + b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d}$$



$$f = ab + \bar{a}\bar{c}\bar{d} + \bar{b}\bar{c} + \bar{b}\bar{d}$$

① ② ③ ④

1.4 - UTILISATION DES FONCTIONS

1.41 - ORGANE DE CALCUL D'UN CALCULATEUR

Les calculs peuvent être effectués :

- en série : l'opération s'effectue séparément sur chaque chiffre, à la manière habituelle. A tout instant les calculs portent sur des chiffres de même poids, en commençant par ceux de poids inférieurs.

- en parallèle : les opérations sont effectuées nombre à nombre.

Si l'on a n chiffres par nombre, il faudra n additionneurs.

1.411 - Additionneur binaire (exemple de l'additionneur série)

Soit à effectuer l'addition des deux nombres.

$$A = a_n a_{n-1} \dots a_p \dots a_1$$

$$B = b_n b_{n-1} \dots b_p \dots b_1$$

Envisageons les opérations portant sur les chiffres de rang p compris entre 1 et n .

Soit : s_p la somme modulo 2 de a_p et de b_p et

s_p la retenue

Le **demi additionneur** est l'organe logique qui permet d'obtenir s_p et r_p :

L'addition complète sera obtenue en ajoutant s_p et r_{p-1} , retenue de l'opération précédente.

Le tableau de vérité doit être le suivant :

a_p	b_p	s_p	r_p
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$\bar{a}_p$	$\bar{b}_p$	$a\bar{b}$	$\bar{a}b$	$a\bar{b} + \bar{a}b$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	0

nous constatons que :

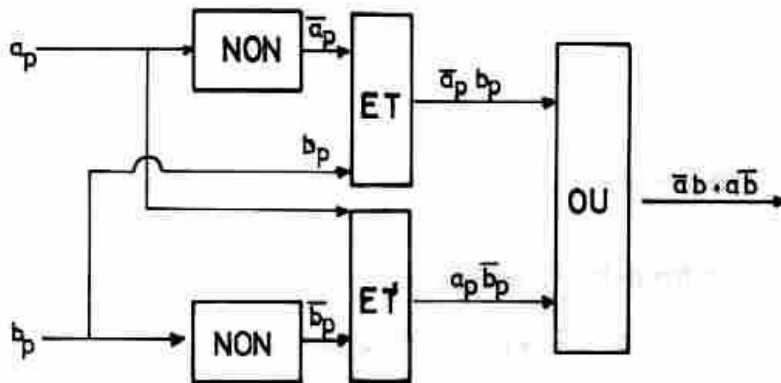
$$s_p = a_p \bar{b}_p + \bar{a}_p b_p = a_p \oplus b_p \quad (\text{"ou" exclusif})$$

$$r_p = a_p b_p$$

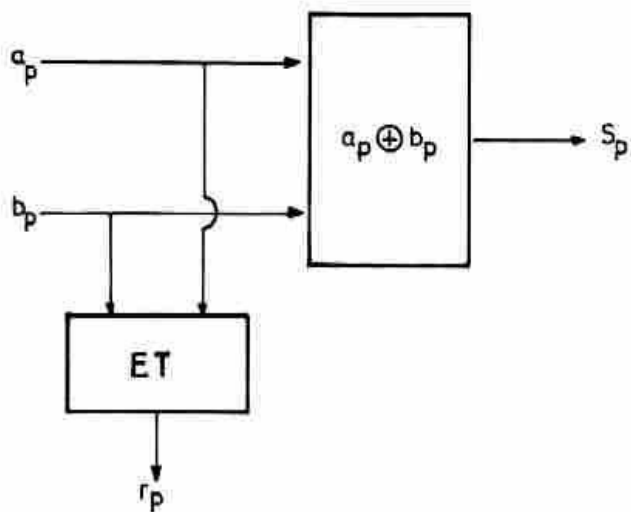
A-1.8

Ces circuits peuvent être réalisés à l'aide de circuits "ET" et "OU" et "NON".

Circuit dilemme ($a_p \oplus b_p$)



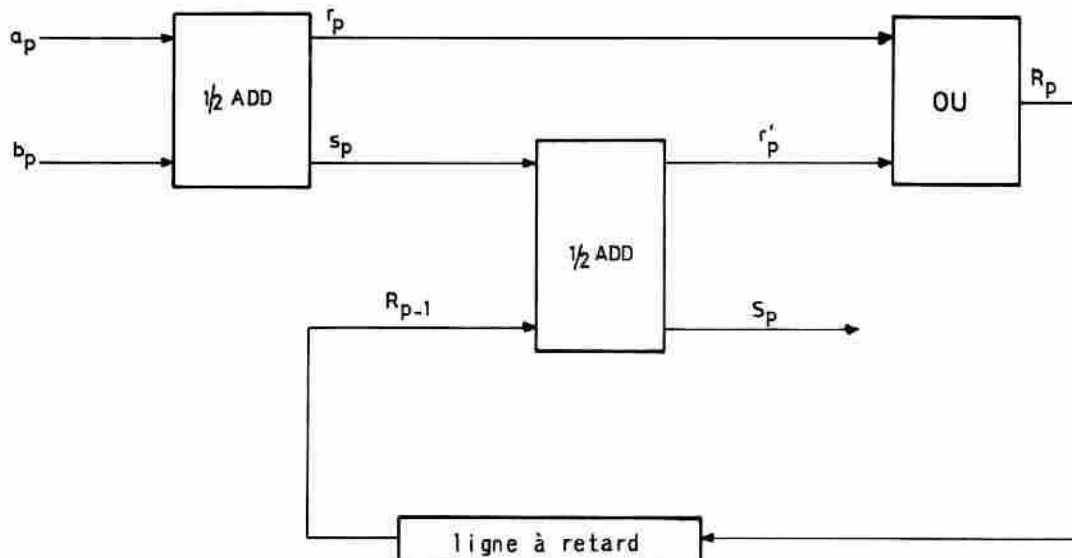
Demi additionneur ($\frac{1}{2}$ ADD)



L'additionneur

L'additionneur peut être réalisé à partir d'un demi additionneur, conformément au tableau de vérité suivant où R_{p-1} représente la retenue de l'addition précédente, S_p , la somme modulo 2 complète et R_p la retenue du cycle p .

a_p	b_p	R_{p-1}	S_p	R_p
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



La ligne à retard a pour but de retarder d'un cycle la retenue R_n : R_{p-1} correspond aussi à la retenue du cycle de calcul précédent.

Dans un tel additionneur série les chiffres binaires arrivent les uns après les autres et le résultat est obtenu chiffre après chiffre.

1.412 - Le multiplieur.

La multiplication est obtenue par une succession d'additions.

Son étude sort du cadre du présent document.

1.42 - UTILISATION DE L'ALGÈBRE DE BOOLE DANS LES PROBLÈMES ADMINISTRATIFS

Les opérations de l'algèbre de Boole correspondent exactement aux opérations de partition des ensembles. L'association d'une variable binaire à toute condition simple permet la transposition immédiate d'un texte sous forme d'expressions dites "booléennes".

Exemple : Règlement d'accession à la propriété.

"Le personnel majeur de l'Entreprise, en activité de service est seul susceptible de bénéficier d'une aide ; l'agent mineur marié peut présenter une demande.

Définition des variables binaires :

- faire partie de l'entreprise : e
- être en activité : a
- être majeur : m
- être mineur : $\bar{m}$
- être marié : M

L'agent a droit si :

$$e \wedge a \wedge m = 1$$

ou : $e \wedge a \wedge \bar{m} \wedge M = 1$

c'est-à-dire : $e \wedge a \wedge m + e \wedge a \wedge \bar{m} \wedge M = 1$

$$e \wedge a \wedge (m + \bar{m} \wedge M) = 1$$

$$e \wedge a \wedge (m + M) = 1$$

Moins explicites que les tables de décision, les expressions booléennes offrent en revanche les avantages suivants :

- la concision ;
- la possibilité de simplification, grâce à l'utilisation des règles pratiques de calcul ;
- le regroupement des cas ;
- l'exhaustivité.